4.2 Injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenia

4.2.1 Definícia. Zobrazenie $f : A \to B$ sa nazýva injektívne (prosté), ak

$$\forall x_1{\in}A \forall x_2{\in}A \bigl(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)\bigr).$$

Podmienka injektívnosti sa dá zapísať tiež v tomto tvare:

$$\forall x_1{\in}A \forall x_2{\in}A \bigl(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2\bigr).$$

Zobrazenie $f : A \to B$ sa nazýva surjektívne, ak $\operatorname{rng} f = B$, t. j.

$$\forall y{\in}B \exists x{\in}A\, y = f(x).$$

V takomto prípade hovoríme, že f je zobrazenie *na* množinu B.

Zobrazenie sa nazýva bijektívne (jednojednoznačné), ak je súčasne injektívne a surjektívne. Bijektívne zobrazenia na množine sa nazývajú tiež permutácie tejto množiny.

4.2.2 Príklad. Funkcia $\lambda x.x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ nie je injektívna ani surjektívna. Platí totiž $(-1)^2 = 1^2$ a $-1 \notin \operatorname{rng}(\lambda x.x^2)$.

Funkcia $\lambda x.x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je injektívna ale nie surjektívna funkcia. Platí totiž $-1 \notin \operatorname{rng}(\lambda x.x^2)$.

Funkcia $\lambda x.x^2 : \mathbb{Z} \to \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x\, y = x^2\}$ je surjektívna ale nie injektívna funkcia. Platí totiž $(-1)^2 = 1^2$.

Funkcia $\lambda x.x^2 : \mathbb{N} \to \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x\, y = x^2\}$ je súčasne injektívna a surjektívna funkcia. Je to teda bijekcia.

4.2.3 Veta. *Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$.*

(i) Ak f, g sú injekcie, potom aj $f \circ g$ je injekcia.
(ii) Ak f, g sú surjekcie, potom aj $f \circ g$ je surjekcia.
(iii) Ak f, g sú bijekcie, potom aj $f \circ g$ je bijekcia.

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

4.2.4 Veta. *Nech $f : A \to B$.*

(i) Zobrazenie f je injekcia práve vtedy, keď opačná relácia f^{-1} je jednoznačná relácia z A do B.
(ii) Zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď opačná relácia f^{-1} je všade definovaná relácia z A do B.
(iii) Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď opačná relácia f^{-1} je zobrazenie množiny B do množiny A.

Dôkaz. Plynie priamo z definície. □

4.2.5 Dôsledok. *Ak f je bijekcia, potom aj f^{-1} je bijekcia.*

Dôkaz. Je to dôsledok predošlej vety a identity $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. □

4.2.6 Veta. *Nech $|A| = m$ a $|B| = n$.*

(i) Počet injektívnych zobrazení z A do B je

$$n^{\underline{m}} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1).$$

(ii) Počet surjektívnych zobrazení z A do B je

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

(iii) Nech $|A| = |B| = n$. Počet bijektívnych zobrazení z A do B je

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Dôkaz. (i): Počet injektívnych zobrazení m-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny je ten istý ako počet variácií bez opakovania m prvkov z n druhov.

(ii): Nech $\mathcal{U}$ je množina všetkých zobrazení z A do B. Nech ďalej $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Označme $\mathcal{B}_i$ množinu tých prvkov f z $\mathcal{U}$, ktoré majú vlastnosť $b_i \notin \operatorname{rng} f$. Podľa vety 4.1.7 všetky množiny $\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber prirodzených čísel k a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$:

$$|\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}| = (n-k)^m.$$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia hľadaný počet je preto rovný číslu

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{B}_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

(iii): Je to dôsledok (i). □