4.1 Základné pojmy

4.1.1 Zobrazenia. Binárna relácia $f \subseteq A \times B$ sa nazýva zobrazenie (funkcia) množiny A do množiny B, ak f je jednoznačná a všade definovaná relácia na množine A:

$$\forall x{\in}A \forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \to y_1 = y_2\big)$$
$$\forall x{\in}A \exists y{\in}B\, (x, y) \in f.$$

Tento fakt skrátene zapisujeme takto $f : A \to B$. Ak $A = B$, tak hovoríme o zobrazení na množine A.

Poznámka. Niekedy sa zobrazením rozumieme usporiadaná trojica (f, A, B), kde f je jednoznačná a všade definovaná relácia z množiny A do množiny B. Vtedy binárna relácia f sa nazýva graf zobrazenia, množina A (definičný) obor zobrazenia a množina B koobor zobrazenia.

4.1.2 Notácia. Nech $f : A \to B$. Ak $(x, y) \in f$, potom píšeme $f(x)$ namiesto y. Prvok y sa nazýva hodnota zobrazenia f pre prvok x. Čiže

$$\forall x{\in}A \forall y{\in}B \big(f(x) = y \leftrightarrow (x, y) \in f\big).$$

Ak $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$, potom aplikáciu $f\big((a_1, \ldots, a_n)\big)$ zapisujeme stručne takto $f(a_1, \ldots, a_n)$. Ak $f : A^n \to A$, tak hovoríme o n-árnej operácii na A.

4.1.3 Rovnosť zobrazení. Pre zobrazenia množiny A do množiny B má axióma extenzionalita tento tvar. Ak $f : A \to B$ a $g : A \to B$, potom

$$f = g \leftrightarrow \forall x{\in}A\, f(x) = g(x).$$

4.1.4 Skladanie zobrazení. Ak $f : A \to B$ a $g : B \to C$, potom pre ich zloženie platí $f \circ g : A \to C$. Plynie to z faktu, že jednoznačné a všade definované relácie sú uzavreté na operáciu skladania.

Všimnime si tiež, že pre ľubovolné prvky $x \in A$ a $z \in C$ platí:

$$(f \circ g)(x) = z \Leftrightarrow \exists y{\in}B \big(f(x) = y \wedge g(y) = z\big) \Leftrightarrow g\, f(x) = z.$$

Odtiaľ dostaneme

$$f \circ g = \big\{(x, z) \in A \times C \,\big|\, g\, f(x) = z\big\}$$
$$\forall x \in A\, (f \circ g)(x) = g\, f(x).$$

4.1.5 Obraz a vzor množiny v zobrazení. Nech $f : A \to B$. Zápis $f\,(X)$ znamená obraz množiny $X \subseteq A$ v zobrazení f:

$$f\,(X) = \big\{y \in B \,\big|\, \exists x{\in}X\, f(x) = y\big\}.$$

Zápis $f^{-1}(Y)$ znamená vzor množiny $Y \subseteq B$ v zobrazení f:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid \exists y{\in}Y\ f(x) = y\} = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

4.1.6 Zúženie a rozšírenie zobrazenia. Zúžením zobrazenia $f : A \to B$ na $A_1 \subseteq A$ rozumieme zobrazenie $f|A_1 : A_1 \to B$ definované predpisom

$$f|A_1 = f \cap (A_1 \times B).$$

Platí teda

$$f|A_1 = \{(x,y) \in f \mid x \in A_1\} = \{(x,y) \in A_1 \times B \mid f(x) = y\}$$
$$\forall x{\in}A_1\ (f|A_1)(x) = f(x).$$

Hovoríme, že f je rozšírenie zobrazenia $f|A_1$ z množiny A_1 na množinu A.

4.1.7 Veta. *Nech $|A| = m$ a $|B| = n$. Počet zobrazení množiny A do množiny B je*

$$n^m = \overbrace{n \times n \times \cdots n}^{m\text{-krát}}.$$

Dôkaz. Počet zobrazení m-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny je ten istý ako počet variácií s opakovaním m prvkov z n druhov. □

Základné definičné princípy pre zobrazenia

4.1.8 Kontextuálna definícia zobrazenia. Nech A a B sú množiny. Nech ďalej $\varphi[x,y]$ je výroková forma v uvedených premenných z definičným oborom obsahujúcim $A \times B$. Nech pre $\varphi[x,y]$ platí existenčná podmienka

$$\forall x{\in}A \exists y{\in}B\ \varphi[x,y]$$

a podmienka jednoznačnosti

$$\forall x{\in}A \forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big(\varphi[x,y_1] \wedge \varphi[x,y_2] \to y_1 = y_2\big).$$

Potom existuje práve jediné zobrazenie $f : A \to B$ také, že

$$\forall x{\in}A \forall y{\in}B \big(f(x) = y \leftrightarrow \varphi[x,y]\big). \tag{1}$$

Stačí totiž položiť

$$f = \{(x,y) \in A \times B \mid \varphi[x,y]\}.$$

Poznámka. Konjunkciu existenčnej podmienky a podmienky jednoznačnosti budeme skrátene zapisovať takto:

$$\forall x{\in}A\,\exists_1 y{\in}B\;\varphi[x,y].$$

4.1.9 Implicitná definícia zobrazenia. Definícia 4.1.8(1) sa často zapisuje v tomto ekvivalentnom tvare:

$$\forall x{\in}A\;\varphi[x,f(x)].$$

Vtedy hovoríme o implicitnej definícii zobrazenia $f : A \to B$.

4.1.10 Explicitná definícia zobrazenia. Ak v 4.1.8 je

$$\varphi[x,y] \equiv \tau[x] = y,$$

potom definícia 4.1.8(1) je ekvivalentná tejto rovnosti:

$$\forall x{\in}A\; f(x) = \tau[x].$$

Tu hovoríme o explicitnej definícii zobrazenia $f : A \to B$. V takom prípade sa často používa Churchova λ-notácia $\lambda x.\tau$ pre označenie zobrazenia f.

Príklady zobrazení

4.1.11 Identické zobrazenie. Nech A je množina. Identické zobrazenie $\mathrm{I}_A : A \to A$ na množine A je definované explicitne predpisom

$$\forall x{\in}A\; \mathrm{I}_A(x) = x.$$

Platí teda

$$\mathrm{I}_A = \big\{(x,y) \in A^2 \;\big|\; x = y\big\}.$$

Čiže $\mathrm{I}_A = \lambda x.x$ s pomocou Churchovej λ-notácie.

4.1.12 Konštantné funkcie. Nech A je množina a nech $a \in A$ je ľubovolný ale pevne daný jej prvok. Potom konštantná funkcia zodpovedajúca prvku a je zobrazenie $\mathrm{K}_a : A \to A$ na množine A definované explicitne týmto predpisom:

$$\forall x{\in}A\; \mathrm{K}_a(x) = a.$$

Platí teda

$$\mathrm{K}_a = \big\{(x, y) \in A^2 \;\big|\; a = y\big\}.$$

Čiže $\mathrm{K}_a = \lambda x.a$ s pomocou Churchovej λ-notácie.

4.1.13 Charakteristická funkcia. Nech U je základné univerzum. Charakteristickou funkciou množiny $A \subseteq U$ rozumieme funkciu $\chi_A : U \to \{0, 1\}$ definovanú predpisom:

$$\forall x{\in}U \forall y{\in}\{0, 1\}\big(\chi_A(x) = y \leftrightarrow x \in A \wedge y = 1 \vee x \notin A \wedge y = 0\big).$$

Platí teda

$$\chi_A = \big\{(x, y) \in U \times \{0, 1\} \;\big|\; x \in A \wedge y = 1 \vee x \notin A \wedge y = 0\big\}.$$

4.1.14 Projekcie. Nech $A_1, \ldots, A_n$ sú množiny a $1 \leq i \leq n$. Potom i-tá projekcia karteziánskeho súčinu $A_1 \times \cdots \times A_n$ je zobrazenie

$$\mathrm{pr}_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$$

definované explicitne predpisom

$$\forall x_1{\in}A_1 \ldots \forall x_n{\in}A_n \, \mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

Platí teda

$$\mathrm{pr}_i = \big\{((x_1, \ldots, x_n), y) \in (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_i \;\big|\; x_i = y\big\}.$$

Čiže $\mathrm{pr}_i = \lambda x_1 \ldots \lambda x_n.x_i$ s pomocou Churchovej λ-notácie.