4.3 Inverzné zobrazenia

4.3.1 Definícia. Nech $f : A \to B$ a $g : B \to A$. Zobrazenie g sa nazýva pravé inverzné zobrazenie k f, ak $f \circ g = \mathrm{I}_A$. Zobrazenie g sa nazýva ľavé inverzné zobrazenie k f, ak $g \circ f = \mathrm{I}_B$. Zobrazenie g sa nazýva inverzné zobrazenie k f, ak je súčasne pravé a ľavé inverzné zobrazenie k f.

4.3.2 Veta. *Nech $f : A \to B$ a $g : B \to A$.*

(i) Ak g je pravé inverzné zobrazenie k f, potom f je ľavé inverzné zobrazenie ku g.
(ii) Ak g je ľavé inverzné zobrazenie k f, potom f je pravé inverzné zobrazenie ku g.
(iii) Ak g je inverzné zobrazenie k f, potom f je inverzné zobrazenie ku g.

Dôkaz. Plynie priamo z definície. □

4.3.3 Lema. *Nech $f : A \to B$ a $g : B \to A$. Ak $f \circ g = \mathrm{I}_A$, potom f je injekcia a g surjekcia.*

Dôkaz. Najprv ukážeme, že f je injektívne zobrazenie. Nech $x_1, x_2 \in A$ sú ľubovolné prvky také, že $f(x_1) = f(x_2)$. Postupnými úpravami dostaneme

$$x_1 = \mathrm{I}_A(x_1) = (f \circ g)(x_1) = g\,f(x_1) = g\,f(x_2) = (f \circ g)(x_2) = \mathrm{I}_A(x_2) = x_2.$$

Zobrazenie f je teda injekcia.

Teraz ukážeme, že g je surjektívne zobrazenie. Nech $x \in A$. Potom z uvedených predpokladov dostaneme

$$x = \mathrm{I}_A(x) = (f \circ g)(x) = g\,f(x).$$

Pretože $f(x) \in B$, dokázali sme, že platí $\forall x{\in}A\,\exists y{\in}B\; x = g(y)$. Zobrazenie g je preto surjekcia. □

4.3.4 Veta. *Zobrazenie s neprázdnym oborom je injektívne práve vtedy, keď má pravé inverzné zobrazenie.*

Poznámka. Z lemy 4.3.3 plynie, že pravé inverzné zobrazenie, ak existuje, tak je surjekcia.

Dôkaz. Nech $A \neq \emptyset$ a $f : A \to B$. Potrebujeme dokázať, že zobrazenie f je injekcia práve vtedy, keď existuje zobrazenie $g : B \to A$ také, že $f \circ g = \mathrm{I}_A$.

Predpokladajme najprv, že f je injektívne zobrazenie. Nech x_0 je ľubovolný, ale pevne vybratý prvok neprázdnej množiny A. Pretože f je injekcia, tak predpisom

$$\forall y{\in}B\,\forall x{\in}A\big(g(y) = x \leftrightarrow f(x) = y \vee y \notin \operatorname{rng} f \wedge x = x_0\big)$$

je korektne definované zobrazenie $g : B \to A$ (zdôvodnite to!). Nech $x \in A$ je ľubovolný prvok. Pretože $f(x) \in \operatorname{rng} f \subseteq B$, tak z definície zobrazenia g dostaneme rovnosť

$$(f \circ g)(x) = g\, f(x) = x = \mathrm{I}_A(x).$$

Tým sme dokázali $f \circ g = \mathrm{I}_A$.

Predpokladajme teraz, že existuje zobrazenie $g : B \to A$ také, že $f \circ g = \mathrm{I}_A$. Injektívnosť zobrazenia f plynie z lemy 4.3.3. □

4.3.5 Veta. *Zobrazenie je surjektívne práve vtedy, keď má ľavé inverzné zobrazenie.*

Poznámka. Z lemy 4.3.3 plynie, že ľavé inverzné zobrazenie, ak existuje, tak je injekcia.

Dôkaz. Nech $f : A \to B$. Potrebujeme dokázať, že zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď existuje zobrazenie $g : B \to A$ také, že $g \circ f = \mathrm{I}_B$.

Predpokladajme najprv, že f je surjektívne zobrazenie. Nech ďalej

$$\sigma : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$$

je ľubovolné, ale pevne vybraté zobrazenie (selektor) také, že

$$\forall X \big(X \subseteq A \wedge X \neq \emptyset \to \sigma(X) \in X \big). \tag{$\dagger_1$}$$

Pretože f je surjekcia, tak predpisom

$$\forall y {\in} B \; g(y) = \sigma\, f^{-1}(\{y\})$$

je korektne definované zobrazenie $g : B \to A$ (zdôvodnite to!). Tvrdíme, že toto zobrazenie spĺňa vlastnosť

$$\forall y {\in} B \forall x {\in} A \big(g(y) = x \to f(x) = y \big). \tag{$\dagger_2$}$$

Pre ľubovolné $y \in B$ a $x \in A$ totiž dostaneme

$$g(y) = x \Rightarrow \sigma\, f^{-1}(\{y\}) = x \overset{(\dagger_1)}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f(x) \in \{y\} \Rightarrow f(x) = y.$$

Nech $y \in B$. Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$(g \circ f)(y) = f\, g(y) \overset{(\dagger_2)}{=} y = \mathrm{I}_B(y).$$

Tým sme dokázali, že $\forall y \in B\, (g \circ f)(y) = \mathrm{I}_B(y)$. Odtiaľ $g \circ f = \mathrm{I}_B$.

Predpokladajme teraz, že existuje zobrazenie $g : B \to A$ také, že $g \circ f = \mathrm{I}_B$. Surjektívnosť zobrazenia f plynie z lemy 4.3.3. □

4.3.6 Poznámka. Nech $f : A \to B$. Ako priamy dôsledok predchádzajúcich viet dostaneme pre $A \neq \emptyset$, že platí:

Zobrazenie f je bijektívne práve vtedy, keď má pravé a ľavé inverzné zobrazenie.

Ľahko sa ukáže, že toto tvrdenie platí aj pre $A = \emptyset$. Z nasledujúcej lemy plynie, že obe inverzné zobrazenia, ak existujú súčasne pre to isté zobrazenie, tak sú rovnaké a preto jednoznačne určené.

4.3.7 Lema. *Nech $f : A \to B$ a $g, h : B \to A$. Ak $f \circ g = \mathrm{I}_A$ a $h \circ f = \mathrm{I}_B$, potom $g = h$.*

Dôkaz. Nech $y \in B$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} g(y) &= g\,\mathrm{I}_B(y) = (\mathrm{I}_B \circ g)(y) = \big((h \circ f) \circ g\big)(y) = \big(h \circ (f \circ g)\big)(y) = \\ &= (h \circ \mathrm{I}_A)(y) = \mathrm{I}_A\, h(y) = h(y). \end{aligned}$$

Dokázali sme, že $\forall y{\in}B\, g(y) = h(y)$. Odtiaľ $g = h$. □

4.3.8 Veta. *Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď opačná relácia f^{-1} je inverzné zobrazenie k f.*

Dôkaz. Nech $f : A \to B$. Potrebujeme dokázať, že zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď opačná relácia $f^{-1} \subseteq B \times A$ je inverzné zobrazenie k f.

Predpokladajme najprv, že f je bijektívne zobrazenie. Z vety 4.2.4 plynie, že opačná relácia f^{-1} je zobrazenie z B do A. Platí teda

$$\forall y{\in}B \forall x{\in}A \big(f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y\big). \tag{$\dagger_1$}$$

Nech $x \in A$ a $y \in B$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f^{-1} f(x) \overset{(\dagger_1)}{=} x = \mathrm{I}_A(x) \\ (f^{-1} \circ f)(y) &= f\, f^{-1}(y) \overset{(\dagger_1)}{=} y = \mathrm{I}_B(y). \end{aligned}$$

Dokázali sme, že platí $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_A$ a $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_B$. Z definície f^{-1} je inverzné zobrazenie k zobrazeniu f

Opačné tvrdenie plynie z vety 4.3.6. □

4.3.9 Dôsledok. *Ak f je bijekcia, potom f je inverzné zobrazenie k f^{-1}.*

Dôkaz. Je to dôsledok predchádzajúcej vety a faktu 4.3.2(iii). □