## Cvičenia

### *Základné pojmy*

**4.1.** Nech $R \subseteq A \times B$. Dokážte, že relácia $R$ je zobrazením práve vtedy, keď $\mathrm{I}_A \subseteq R \circ R^{-1}$ a $R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{I}_B$.

**4.2.** Nech $A$ je množina.

(i) Dokážte, že $\emptyset$ je jediné zobrazenie množiny $\emptyset$ do $A$.
(ii) Dokážte, že ak $A \neq \emptyset$, tak neexistuje zobrazenie množiny $A$ do $\emptyset$.

### *Obraz a vzor množiny v zobrazení*

**4.3.** Nech $f : A \to B$ a $X_1, X_2 \subseteq A$. Dokážte, že platí:

$$\begin{gathered}
X_1 \subseteq X_2 \to f(X_1) \subseteq f(X_2) \\
f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) \\
f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2) \\
f(X_1 \setminus X_2) \supseteq f(X_1) \setminus f(X_2).
\end{gathered}$$

Ukážte tiež, že v posledných dvoch tvrdeniach nemusí platiť rovnosť. Dokážte tvrdenia priamo, bez odvolania sa na podobné tvrdenia pre relácie.

**4.4.** Nech $A, B, X, Y$ sú množiny také, že $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$. Dokážte, že pre ľubovolné zobrazenie $f$ z $A$ do $B$ platí:

$$\begin{aligned}
&f(X) \subseteq Y \leftrightarrow f \cap \bigl(X \times \overline{Y}\bigr) = \emptyset \\
&f(X) \supseteq Y \leftrightarrow \operatorname{rng}\bigl(f \cap (X \times Y)\bigr) = Y \\
&f(X) = Y \leftrightarrow f \cap \bigl(X \times \overline{Y}\bigr) = \emptyset \wedge \operatorname{rng}\bigl(f \cap (X \times Y)\bigr) = Y.
\end{aligned}$$

Dokážte tvrdenia priamo, bez odvolania sa na podobné tvrdenia pre relácie.

**4.5.** Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) \subseteq Y$?
(ii) Koľko je zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) \supseteq Y$?
(iii) Koľko je zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) = Y$?

**4.6.** Nech $f : A \to B$ a $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Dokážte, že platí:

$$\begin{aligned}
Y_1 \subseteq Y_2 \to f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)\\
f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)\\
f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)\\
f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2).
\end{aligned}$$

Dokážte tvrdenia priamo, bez odvolania sa na podobné tvrdenia pre relácie.

**4.7.** Nech $A, B, X, Y$ sú množiny také, že $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$. Dokážte, že pre ľubovolné zobrazenie $f$ z $A$ do $B$ platí:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(Y) \subseteq X \leftrightarrow f\big(\overline{X}\big) \subseteq \overline{Y}\\
&f^{-1}(Y) \supseteq X \leftrightarrow f(X) \subseteq Y\\
&f^{-1}(Y) = X \leftrightarrow f(X) \subseteq Y \wedge f\big(\overline{X}\big) \subseteq \overline{Y}.
\end{aligned}$$

**4.8.** Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) \subseteq X$?
(ii) Koľko je zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) \supseteq X$?
(iii) Koľko je zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) = X$?

## *Injektívne zobrazenia*

**4.9.** Dokážte, že $\emptyset$ je injektívne zobrazenie množiny $\emptyset$ do množiny $A$.

**4.10.** Nech $f : A \to B$. Dokážte, že nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) $f$ je injektívne zobrazenie.
(ii) $f^{-1}$ je jednoznačná relácia.
(iii) $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_B$.

**4.11.** Nech $f : A \to B$ je injektívne zobrazenie a $X_1, X_2 \subseteq A$. Dokážte, že platí:

$$\begin{aligned}
X_1 \subset X_2 \to f(X_1) \subset f(X_2)\\
f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)\\
f(X_1 \setminus X_2) = f(X_1) \setminus f(X_2).
\end{aligned}$$

**4.12.** Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je injektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) \subseteq Y$?
(ii) Koľko je injektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) \supseteq Y$?
(iii) Koľko je injektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) = Y$?

**4.13.** Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je injektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) \subseteq X$?
(ii) Koľko je injektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) \supseteq X$?
(iii) Koľko je injektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) = X$?

## *Surjektívne zobrazenia*

**4.14.** Dokážte, že $\emptyset$ je surjektívne zobrazenie množiny $\emptyset$ do množiny $A$ práve vtedy, keď množina $A$ je prázdna.

**4.15.** Nech $f : A \to B$. Dokážte, že nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) $f$ je surjektívne zobrazenie.
(ii) $f^{-1}$ je všade definovaná relácia.
(iii) $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_A$.

**4.16.** Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je surjektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) \subseteq Y$?
(ii) Koľko je surjektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) \supseteq Y$?
(iii) Koľko je surjektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) = Y$?

**4.17.** Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je surjektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) \subseteq X$?
(ii) Koľko je surjektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) \supseteq X$?
(iii) Koľko je surjektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) = X$?

## *Bijektívne zobrazenia*

**4.18.** Dokážte, že $\emptyset$ je bijektívne zobrazenie množiny $\emptyset$ do množiny $A$ práve vtedy, keď množina $A$ je prázdna.

**4.19.** Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je bijektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) \subseteq Y$?
(ii) Koľko je bijektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) \supseteq Y$?
(iii) Koľko je bijektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f(X) = Y$?

**4.20.** Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je bijektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) \subseteq X$?
(ii) Koľko je bijektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) \supseteq X$?
(iii) Koľko je bijektívnych zobrazení $f$ z $A$ do $B$ takých, že $f^{-1}(Y) = X$?

## *Inverzné zobrazenia*

**4.21.** Uvažujme lemu 4.3.3. Dokážte, že $f$ nemusí byt injekcia a $g$ surjekcia.

**4.22.** Ukážte, že tvrdenie vety 4.3.4 by neplatilo, ak by sme nepredpokladali, že definičný obor zobrazenia je neprázdny.

**4.23.** Nech $f: A \to B$. Dokážte, že nasledujúce podmienky ekvivalentné:

(i) Zobrazenie $f$ je bijekcia.
(ii) Existujú zobrazenia $g, h: B \to A$ také, že $f \circ g = \mathrm{I}_A$ a $h \circ f = \mathrm{I}_B$.
(iii) Existuje zobrazenie $g: B \to A$ také, že $f \circ g = \mathrm{I}_A$ a $g \circ f = \mathrm{I}_B$.