6.4 Nespočítateľné množiny

6.4.1 Definícia. Množina, ktorá nie je spočítateľná, sa nazýva nespočítateľná. Doteraz sme nemali príklad množiny, ktorá nie je spočítateľná. Nasledujúce vety ukazujú, že nespočítateľné množiny skutočne existujú.

6.4.2 Veta. *Množina všetkých nekonečných postupností čísel* $0, 1$ *je nespočítateľná.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \big\{f \;\big|\; f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\big\}$$

je spočítateľná množina. Potom jej prvky možno zoradiť do postupnosti

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Uvažujme funkciu $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ definovanú predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\; g(n) = 1 - f_n(n).$$

Pretože $\lambda n. f_n$ je zobrazenie množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, tak existuje prirodzené číslo n_0 také, že $g = f_{n_0}$. Potom

$$f_{n_0}(n_0) = g(n_0) = 1 - f_{n_0}(n_0) \neq f_{n_0}(n_0).$$

Dostali sme spor. □

6.4.3 Veta. *Množina reálnych čísel je nespočítateľná.*

Dôkaz. Uvažujme prosté zobrazenie $\Lambda : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ definované predpisom

$$\forall f{\in}\{0,1\}^{\mathbb{N}}\; \Lambda(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{10^{n+1}}.$$

Podľa vety 6.4.2 je množina $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nespočítateľná. Podľa vety 6.2.4 je aj jej obraz $\Lambda\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\big)$ nespočítateľná množina. Pretože $\Lambda\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\big) \subseteq \mathbb{R}$, podľa vety 6.2.8 nespočítateľná je aj množina reálnych čísel. □

6.4.4 Veta. *Množina všetkých nekonečných postupností prirodzených čísel je nespočítateľná.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \big\{f \;\big|\; f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\big\}$$

je spočítateľná množina. Potom jej prvky možno zoradiť do postupnosti

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Uvažujme funkciu $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovanú predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, g(n) = f_n(n) + 1.$$

Pretože $\lambda n.f_n$ je zobrazenie množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tak existuje prirodzené číslo n_0 také, že $g = f_{n_0}$. Potom

$$f_{n_0}(n_0) = g(n_0) = f_{n_0}(n_0) + 1 \neq f_{n_0}(n_0).$$

Dostali sme spor. □

6.4.5 Veta. *Systém všetkých podmnožín množiny prirodzených čísel je nespočítateľná množina.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$$

je spočítateľná množina. Potom jej prvky možno zoradiť do postupnosti

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Uvažujme množinu $B \subseteq \mathbb{N}$ definovanú predpisom

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}.$$

Pretože $\lambda n.A_n$ je zobrazenie množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, tak existuje prirodzené číslo n_0 také, že $B = A_{n_0}$. Potom

$$n_0 \in A_{n_0} \Leftrightarrow n_0 \in B \Leftrightarrow n_0 \notin A_{n_0}.$$

Dostali sme spor. □