6.3 Dôležité spočítateľné množiny

6.3.1 Úvodná poznámka. V tejto časti sa zoznámime s niektorými nekonečnými spočítateľnými množinami, s ktorými sa bežne stretneme v diskrétnej matematike a informatike.

Spočítateľnosť budeme často demonštrovať pomocou konštrukcie injektívneho zobrazenia do množiny prirodzených čísel (pozri vetu 6.2.2). V niektorých príkladoch využívame projekcie K a L Cantorovej párovacej funkcie J (pozri 5.3.3).

Číselné množiny

6.3.2 Veta. *Množina celých čísel je spočítateľná.*

Dôkaz. Zobrazenie $(\lambda n.a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definované predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, a_n = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = (-1)^n (n \div 2)$$

je enumerácia množiny $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}, \ldots\} = \\ &= \{0, 0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots\}. \end{aligned}$$

□

6.3.3 Veta. *Množina nezáporných racionálnych čísel je spočítateľná.*

Dôkaz. Zobrazenie $(\lambda n.a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{0+}$ definované predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, a_n = \frac{\mathrm{K}(n)}{\mathrm{L}(n) + 1}$$

je enumerácia množiny $\mathbb{Q}_{0+}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{0+} &= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\} = \\ &= \left\{ \frac{0}{0+1}, \frac{0}{1+1}, \frac{1}{0+1}, \frac{0}{2+1}, \frac{1}{1+1}, \frac{2}{0+1}, \ldots \right\} = \\ &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \ldots \right\} = \\ &= \left\{ 0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 2, \ldots \right\}. \end{aligned}$$

Platí totiž

$$\forall k{\in}\mathbb{N} \forall l{\in}\mathbb{N}\, a_{\mathrm{J}(k,l)} = \frac{k}{l+1}.$$

□

6.3.4 Veta. *Množina záporných racionálnych čísel je spočítateľná.*

Dôkaz. Dokáže sa to podobne ako predchádzajúce tvrdenie. □

6.3.5 Veta. *Množina racionálnych čísel je spočítateľná.*

Dôkaz. Tvrdenie plynie z viet 6.3.3, 6.3.4 a 6.2.9. □

Karteziánsky súčin

6.3.6 Veta. *Karteziánsky súčin $\mathbb{N}^n$ je spočítateľná množina pre každé prirodzené číslo n.*

Dôkaz. Pretože $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$ a $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$, tvrdenie triviálne platí pre $n = 0, 1$. Predpokladajme teda. že $n \geq 2$. Nech p_m označuje m-té prvočíslo, t. j.

$$p_1 = 2 \quad p_2 = 3 \quad p_3 = 5 \quad p_4 = 7 \quad p_5 = 11 \quad \ldots .$$

Hľadanú injekciu $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definujeme vzťahom:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, f(x_1, \ldots, x_n) = p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n}.$$ □

Množiny slov

6.3.7 Lema. *Ak $p > 1$ je prirodzené číslo, potom každé prirodzené číslo x sa dá jednoznačne zapísať v tvare*

$$x = \sum_{i<n} d_i p^i = d_{n-1}p^{n-1} + d_{n-2}p^{n-2} + \cdots + d_2p^2 + d_1p^1 + d_0p^0,$$

kde $1 \leq d_i \leq p$ pre každé $i < n$.

Dôkaz. Existencia p-adického rozvoja sa dokazuje úplnou indukciou. V dôkaze sa využije táto vlastnosť neúplného delenia so zvyškom:

> Pre každé nenulové prirodzené číslo x existuje práve jediná dvojica prirodzených čísel y, d taká, že $x = yp + d$ a $1 \leq d \leq p$.

Jednoznačnosť p-adického rozvoja sa dokazuje úplnou indukciou.

6.3.8 Veta. *Množina slov nad konečnou abecedou je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Nech Σ^* je množina (konečných) slov nad abecedou $\Sigma = \{1, \ldots, p\}$, kde $p > 1$. Hľadanú injekciu $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ definujeme vzťahom (je to bijekcia!):

$$f(\text{"}d_{n-1} \ldots d_0\text{"}) = \sum_{i<n} d_i p^i.$$ □

Konečné postupnosti

6.3.9 Veta. *Množina* $\cup_{n=0}^{\infty}\mathbb{N}^n$ *je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Hľadanú injekciu $f : \cup_{n=0}^{\infty}\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definujeme vzťahom:

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{ak } s \text{ je prázdna postupnosť } \emptyset, \\ p_1^{x_1+1} \cdots p_n^{x_n+1} & \text{ak } s \text{ je neprázdna postupnosť } (x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Tu p_n označuje n-té prvočíslo, t. j.

$$p_1 = 2 \quad p_2 = 3 \quad p_3 = 5 \quad p_4 = 7 \quad p_5 = 11 \quad \dots .$$ □

Dôkaz. Hľadanú injekciu $f : \cup_{n=0}^{\infty}\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definujeme vzťahom:

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{ak } s \text{ je prázdna postupnosť } \emptyset, \\ \sum_{i=1}^{n} 2^{x_1+\cdots+x_i+i-1} & \text{ak } s \text{ je neprázdna postupnosť } (x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Všimnime si, že zobrazenie f je v skutočnosti bijekcia. □

Konečné množiny

6.3.10 Veta. *Systém všetkých konečných podmnožín množiny prirodzených čísel je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Pre $A \subseteq \mathbb{N}$ symbolom $\chi_A : A \to \{0, 1\}$ označujeme charakteristickú funkciu množiny A (pozri tiež sekciu 4.1):

$$\forall x{\in}\mathbb{N}\forall y{\in}\{0,1\}\big(\chi_A(x) = y \leftrightarrow x \in A \wedge y = 1 \vee x \notin A \wedge y = 0\big).$$

Nech $\mathbb{SET}(A)$ je systém všetkých konečných podmnožín množiny prirodzených čísel. Hľadanú injekciu $f : \mathbb{SET}(A) \to \mathbb{N}$ definujeme vzťahom:

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_A(n) 2^n$$

Všimnime si, že zobrazenie f je v skutočnosti bijekcia. □