6.2 Spočítateľné množiny

6.2.1 Definícia. Množina A sa nazýva spočítateľnou, ak je prázdna alebo existuje zobrazenie $f : \mathbb{N} \to A$ množiny prirodzených čísel $\mathbb{N}$ na množinu A:

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\} = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{rng} f \neq \emptyset.$$

Surjektívne zobrazenie f sa nazýva enumerácia množiny A alebo tiež nekonečná postupnosť prvkov množiny A. Čiže neprázdna množina je spočítateľná, ak sa dá zoradiť do (nekonečnej) postupnosti.

6.2.2 Veta. *Množina A je spočítateľná práve vtedy, keď existuje injektívne zobrazenie množiny A do množiny prirodzených čísel.*

Dôkaz. Pre $A \neq \emptyset$ je tvrdenie dôsledkom vety 4.3.4 a lemy 4.3.3. Pre $A = \emptyset$ tvrdenie plynie z faktu, že $\emptyset$ je injektívne zobrazenie množiny $\emptyset$ do $\mathbb{N}$. □

6.2.3 Veta. *Ak $f : A \to B$ je surjektívne zobrazenie a množina A je spočítateľná, potom aj B je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Pre $A = \emptyset$ tvrdenie očividne platí. Nech $(\lambda n.a_n) : \mathbb{N} \to A$ je enumerácia spočítateľnej množiny A:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

Potom zobrazenie $(\lambda n.b_n) : \mathbb{N} \to B$ definované predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, b_n = f(a_n)$$

je hľadaná enumerácia množiny B:

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\} = \{f(a_0), f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n), \dots\}.$$ □

6.2.4 Veta. *Ak $f : A \to B$ je injektívne zobrazenie a množina B je spočítateľná, potom aj A je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Z vety 6.2.2 plynie existencia injektívneho zobrazenia $g : B \to N$. Z vety 4.2.3 dostaneme, že kompozícia $f \circ g : A \to N$ je injektívne zobrazenie. Množina A je spočítateľná podľa vety 6.2.2. □

6.2.5 Veta. *Každá konečná množina je spočítateľná.*

Dôkaz. Pre $A = \emptyset$ tvrdenie plynie z definície. Nech $A = \{x_0, \dots, x_n\} \neq \emptyset$. Potom zobrazenie $(\lambda m.a_m) : \mathbb{N} \to A$ definované predpisom

$$\forall m{\in}\mathbb{N} \forall x{\in}A \big(a_m = x \leftrightarrow \bigwedge_{i=0}^{n} (m = i \wedge x = x_i) \vee m > n \wedge x = x_0\big)$$

je enumerácia množiny A:

$$A = \{a_0, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\} = \{x_0, \dots, x_n, x_0, x_0, x_0, \dots\}. \qquad \square$$

6.2.6 Veta. *Množina prirodzených čísel je spočítateľná.*

Dôkaz. Zobrazenie $(\lambda n.a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, a_n = n$$

je enumerácia množiny $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}. \qquad \square$$

6.2.7 Lema. *Každá podmnožina množiny prirodzených čísel je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Nech $A \subseteq \mathbb{N}$. Ak množina A je konečná, tak jej spočítateľnosť plynie z vety 6.2.5. Ak množina A je nekonečná, potom zobrazenie $(\lambda n.a_n) : \mathbb{N} \to A$ definované rekurzívnym predpisom

$$\begin{aligned} a_0 &= \min A \\ a_{n+1} &= \min\{x \in A \mid x > a_n\} \end{aligned}$$

je hľadaná enumerácia množiny A:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}. \qquad \square$$

Poznámka. Všimnime si, že postupnosť a_n je ostro rastúca:

$$\forall m{\in}\mathbb{N}\forall n{\in}\mathbb{N}(m < n \to a_m < a_n).$$

Surjektívne zobrazenie $(\lambda n.a_n) : \mathbb{N} \to A$ je v skutočnosti bijekcia.

6.2.8 Veta. *Každá podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Pre $A = \emptyset$ tvrdenie zrejme platí. Nech teda $B \subseteq A \neq \emptyset$. Nech ďalej $f : A \to B$ je enumerácia spočítateľnej množiny A:

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}.$$

Všimnime si, že platí

$$f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap \operatorname{rng} f = B \cap A = B.$$

Množina $f^{-1}(B) \subseteq \mathbb{N}$ je spočítateľná podľa lemy 6.2.7. Teraz stačí aplikovať vetu 6.2.3 a dostaneme, že aj množina $B = f\big(f^{-1}(B)\big)$ je spočítateľná. $\square$

6.2.9 Veta. *Ak A, B sú spočítateľné množiny, potom aj ich zjednotenie $A \cup B$ je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Tvrdenie očividne platí, ak niektorá z množín A,B je prázdna. Nech $(\lambda n.a_n) : \mathbb{N} \to A$ resp. $(\lambda n.b_n) : \mathbb{N} \to B$ je enumerácia množiny A resp. B:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$
$$B = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Potom zobrazenie $(\lambda n.c_n) : \mathbb{N} \to A \cup B$ definované predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, c_{2n} = a_n$$
$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, c_{2n+1} = b_n$$

je enumerácia množiny $A \cup B$:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \dots, c_{2n}, c_{2n+1}, \dots\} = \\ &= \{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\}. \end{aligned}$$ □

6.2.10 Dôsledok. *Zjednotenie konečného systému spočítateľných množín je spočítateľná množina.*

6.2.11 Veta. *Ak A, B sú spočítateľné množiny, potom aj ich karteziánsky súčin $A \times B$ je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Tvrdenie očividne platí, ak niektorá z množín A,B je prázdna. Nech $(\lambda n.a_n) : \mathbb{N} \to A$ resp. $(\lambda n.b_n) : \mathbb{N} \to B$ je enumerácia množiny A resp. B:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$
$$B = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Nech K a L sú projekcie Cantorovej párovacej funkcie J (pozri 5.3.3). Potom zobrazenie $(\lambda n.c_n) : \mathbb{N} \to A \times B$ definované predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, c_n = \big(a_{\mathrm{K}(n)}, b_{\mathrm{L}(n)}\big)$$

je enumerácia množiny $A \times B$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \dots\} = \\ &= \{(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_0, b_2), (a_1, b_1), (a_2, b_0), \dots\}. \end{aligned}$$

Platí totiž

$$\forall k{\in}\mathbb{N} \forall l{\in}\mathbb{N}\, c_{\mathrm{J}(k,l)} = (a_k, b_l).$$ □

6.2.12 Dôsledok. *Karteziánsky súčin konečného systému spočítateľných množín je spočítateľná množina.*

6.2.13 Veta. *Zjednotenie spočítateľného systému spočítateľných množín je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Nech S je spočítateľný systém spočítateľných množín. Uvažujme jeho podsystém S' definovaný predpisom

$$S' = \{A \in S \mid A \neq \emptyset\} \subseteq S.$$

Očividne S' je spočítateľný systém neprázdnych spočítateľných množín. Platí tiež rovnosť $\bigcup S' = \bigcup S$. Stačí ukázať, že $\bigcup S'$ je spočítateľná množina.

Ak $S' = \emptyset$, tak zjednotenie $\bigcup S' = \emptyset$ je triviálne spočítateľná množina. Predpokladajme teraz, že $S' \neq \emptyset$. Pretože S' neobsahuje prázdne množiny, tak zjednotenie $\bigcup S' \neq \emptyset$ je neprázdna množina. Systém S' je spočítateľná množina a preto jeho prvky možno zoradiť do postupnosti:

$$S' = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots\} = \{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Každá z množín A_k je neprázdna spočítateľná množina, ktorej prvky možno zoradiť do postupnosti:

$$A_k = \{g_k(0), g_k(1), g_k(2), \dots, g_k(l), \dots\} = \{g_k(l) \mid l \in \mathbb{N}\}.$$

Nech K a L sú projekcie Cantorovej párovacej funkcie J (pozri 5.3.3). Potom zobrazenie $f : \mathbb{N} \to \bigcup S'$ definované predpisom

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\, f(n) = g_{\mathrm{K}(n)}\big(\mathrm{L}(n)\big)$$

je hľadaná enumerácia množiny $\bigcup S'$:

$$\begin{aligned}\bigcup S' &= \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots\} = \\ &= \{g_0(0), g_0(1), g_1(0), g_0(2), g_1(1), g_2(0), \dots\}.\end{aligned}$$

Platí totiž

$$\forall k{\in}\mathbb{N}\forall l{\in}\mathbb{N}\, f\mathrm{J}(k,l) = g_k(l). \qquad \square$$

6.2.14 Veta. *Množina všetkých konečných postupností spočítateľnej množiny je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Nech A je spočítateľná množina. Podľa dôsledku vety 6.2.11 karteziánsky súčin A^n je spočítateľná množina pre každé prirodzené číslo n. Spočítateľnosť množiny $\mathbb{SEQ}(A)$ všetkých konečných postupností množiny A je dôsledok vety 6.2.13 a nasledujúceho vyjadrenia:

$$\mathbb{SEQ}(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n = \bigcup\big\{A^n \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}. \qquad \square$$

6.2.15 Veta. *Systém všetkých konečných podmnožín spočítateľnej množiny je spočítateľná množina.*

Notácia. V dôkaze tejto vety symbolom

$$\binom{A}{k} = \big\{B \in \mathcal{P}(A) \;\big|\; |B| = k\big\}.$$

označujeme systém k-prvkových podmnožín množiny A.

Dôkaz. Nech A je spočítateľná množina. Pre $A = \emptyset$ tvrdenie zrejme platí. Predpokladajme preto, že prvky množiny A možno zoradiť do postupnosti:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Spočítateľnosť systému $\mathbb{SET}(A)$ všetkých konečných podmnožín množiny A je dôsledok vety 6.2.13 a nasledujúceho vyjadrenia:

$$\begin{aligned} \binom{A}{k} &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \binom{\{a_0, \ldots, a_n\}}{k} \qquad \text{pre } k \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{SET}(A) &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \binom{A}{k}. \end{aligned}$$

□