Príprava na 2. semestrálny test

Posledná zmena: 18.4.2011, 11:45.

Literatúra

1. Grimaldi, R. P.: Discrete and Combinatorial Mathematics, Pearson Addison-Wesley, 2004 (5th edition).

2. Matoušek, J., Nešetřil, J.: Kapitoly z diskrétnej matematiky, Nakladatelství Karolinum, Praha 2009 (4. vydanie).

3. Olejár, D., Škoviera, M.: Úvod do diskrétnych matematických štruktúr, Bratislava 2007.

Funkcie

Úloha. Nech $A_1 \subseteq A$ a $B_1 \subseteq B$ sú konečné množiny. Koľko je funkcií $f : A \to B$ takých, že platí:

(i) $f(A_1) \subseteq B_1$,

(ii) $f(A_1) \subseteq B_1 \wedge f(\overline{A_1}) \subseteq \overline{B_1}$,

(iii) $A_1 \subseteq f^{-1}(B_1)$,

(iv) $f^{-1}(B_1) \subseteq A_1$, resp.

(v) $f^{-1}(B_1) = A_1$?

Riešte úlohu tiež pre injektívne funkcie.

Návod. Využite tieto vlastnosti obrazu a vzoru množiny:

$$\begin{aligned}
A_1 \subseteq f^{-1}(B_1) &\leftrightarrow f(A_1) \subseteq B_1\\
f^{-1}(B_1) \subseteq A_1 &\leftrightarrow f(\overline{A_1}) \subseteq \overline{B_1}\\
f^{-1}(B_1) = A_1 &\leftrightarrow f(A_1) \subseteq B_1 \wedge f(\overline{A_1}) \subseteq \overline{B_1}.
\end{aligned}$$

Úloha. Funkcia $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ je monotónne rastúca, ak

$$\forall i \forall j \big(1 \leq i < j \leq m \to f(i) \leq f(j)\big).$$

(i) Koľko je monotónne rastúcich funkcií z $\{1, \ldots, m\}$ do $\{1, \ldots, n\}$?

(ii) Nech $1 \leq k \leq m$ a $1 \leq l \leq n$. Koľko je monotónne rastúcich funkcií z $\{1, \ldots, m\}$ do $\{1, \ldots, n\}$ takých, že $f(k) = l$?

Návod. Počítajte kombinácie s opakovaním m prvkov z n druhov.

Relácie na množine

Úloha. Nech R a S sú relácie na množine A. Dokážte alebo vyvráťte:

(i) Ak R a S sú reflexívne, potom aj $R \cap S$ je reflexívna.

(ii) Ak R a S sú reflexívne, potom aj $R \cup S$ je reflexívna.

(iii) Ak R a S sú reflexívne, potom aj $R \circ S$ je reflexívna.

Riešte túto úlohu tiež pre symetrické, antisymetrické, asymetrické resp. tranzitívne relácie.

Úloha. Nech A je konečná množina. Koľko je relácií na A, ktoré sú

(i) reflexívne a symetrické,

(ii) reflexívne a antisymetrické,

(iii) symetrické a antisymetrické,

(iv) symetrické a asymetrické,

(v) antisymetrické a asymetrické,

(vi) reflexívne, symetrické a antisymetrické?

Riešte túto úlohu tiež pre prípad, keď pevne vybraná usporiadaná dvojica je resp. nie je prvkom takej relácie.

Úloha. Koľko je symetrických relácií na n-prvkovej množine, ktoré obsahujú práve k usporiadaných dvojíc? Riešte úlohu pre prípad: $n = 7$ a $k = 4, 5, 7, 8$.

Úloha. Aká je najväčšia možná hodnota $|R|$ antisymetrickej relácie R na n-prvkovej množine? Koľko antisymetrických relácií má túto veľkosť?

Úloha. Nech

$$D_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid n\}$$
$$R_n = \{(x, y) \in D_n^2 \mid x \mid y\}.$$

Spočítajte $|R_n|$ resp. $\left|\overline{R_n}\right|$ pre tieto prípady: $n = 12, 18, 30, 360, \ldots$.

Úloha. Nech $B \subseteq A$ sú ľubovolné ale pevne zvolené množiny. Nech

$$R = \left\{(X, Y) \in \mathcal{P}(A)^2 \mid X \cap B = Y \cap B\right\}.$$

Overte, že R je ekvivalencia na $\mathcal{P}(A)$. Vyriešte tiež tieto príklady:

(i) Ak $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{1, 2\}$, nájdite rozklad $\mathcal{P}(A)$ indukovaný R.

(ii) Ak $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$, nájdite $[X]_R$ pre $X = \{1, 3, 5\}$,

(iii) Koľko tried rozkladu bude v rozklade množiny $\mathcal{P}(A)$ indukovaného ekvivalenciou R pre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$?

Relácie ekvivalencie a rozklady množín

Úloha. Koľko rozkladov na n-prvkovej množiny má veľkosť m? Riešte úlohu pre tieto prípady:

(i) $n = 6$ a $m = 2, 3, 4, 5$.

Úlohu vyriešte buď priamo spočítaním všetkých možností alebo s pomocou rekurentnej vlastnosti Stirlinovych čísel druhého druhu.

Úloha. Koľko je rozkladov na n-prvkovej množine takých, že aspoň jedna trieda rozkladu má práve resp. aspoň k prvkov? Riešte úlohu pre tieto prípady:

(i) $n = 6$ a $k = 3$.

Návod. Pozri poznámky z 9. prednášky.

Úloha. Koľko je relácií ekvivalencie na n-prvkovej množine, ktoré obsahujú práve k usporiadaných dvojíc? Riešte úlohu pre tieto prípady:

(i) $n = 6$ a $k = 5, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 18$.

(ii) $n = 7$ a $k = 6, 7, 8, 9, 11, 13, 19, 23$.

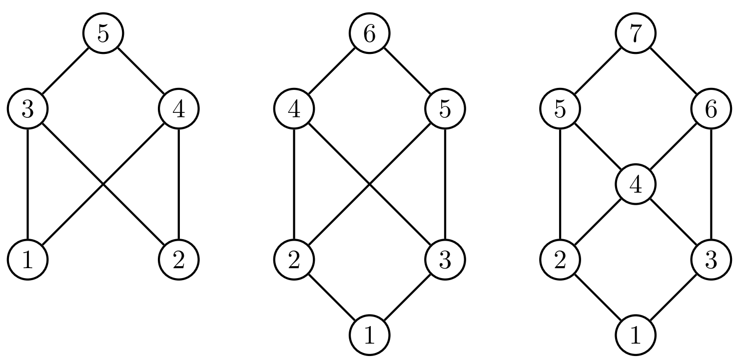
Návod. Pozri poznámky z 9. prednášky.

Usporiadané množiny

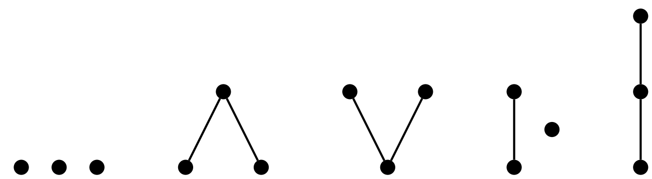
Návod. Pozri tiež 10. prednášku.

Zväzy. Čiastočne usporiadanú množinu (A, R) nazveme zväzom, ak pre každé dva prvky $x, y \in A$ existuje $\inf\{x, y\}$ a $\sup\{x, y\}$.

Úloha. Pre nasledujúce čiastočne usporiadania nájdite horné ohraničenia resp. dolné ohraničenia pre dvojprvkové množiny. Nájdite tie dvojice x a y, pre ktoré $\inf\{x, y\}$ resp. $\sup\{x, y\}$ neexistuje. Ktoré usporiadanie je zväzom?



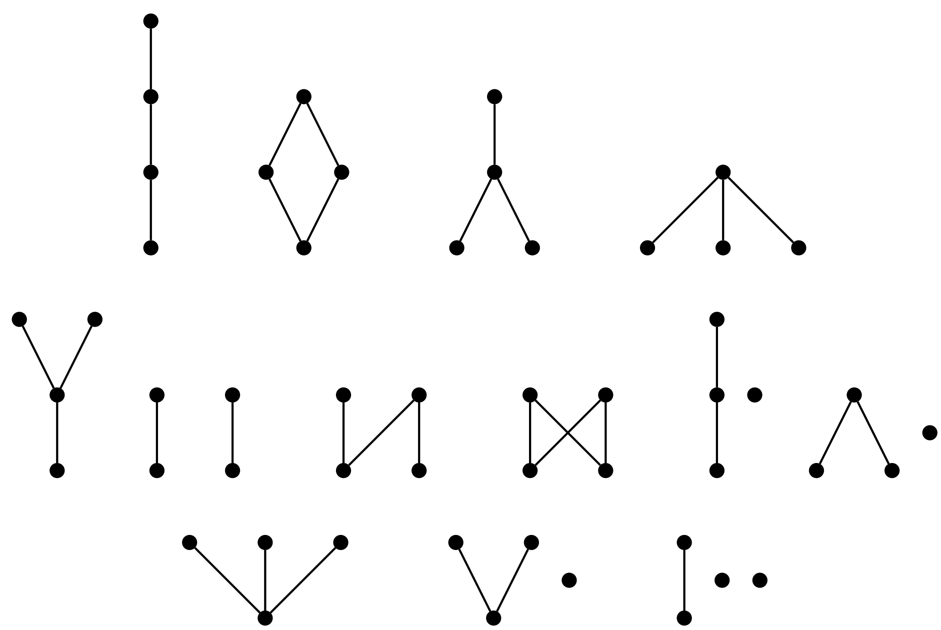
Úloha. Koľko čiastočných usporiadaní na 3-prvkovej množine má Hasseho diagram nasledujúceho tvaru?



Koľko majú maximálnych resp. minimálnych prvkov? Ktoré z nich je zväzom? Ktoré z nich je lineárne usporiadanie?

Úloha. Koľko čiastočných usporiadaní je na n-prvkovej množine? Riešte úlohu pre tieto prípady: $n = 1, 2, 3$.

Úloha. Koľko čiastočných usporiadaní na 4-prvkovej množine má Hasseho diagram nasledujúceho tvaru (pozri obr. 1)? Koľko majú maximálnych resp. minimálnych prvkov? Ktoré z nich je zväzom resp. lineárnym usporiadaním?



Obr. 1: Hasseho diagramy čiastočných usporiadaní na 4-prvkovej množine

Úloha. Koľko čiastočných usporiadaní na n-prvkovej množine je zväzom? Riešte úlohu pre tieto prípady: $n = 1, 2, 3, 4$.

Úloha. Koľko lineárnych usporiadaní je na n-prvkovej množine?