Domáca úloha 6 Diskrétna matematika II Leto 2009-10

Zadané: Streda, 7.aprila
Odovzdať: Do piatku **16.aprila** vášmu cvičiacemu.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať, mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí. Neodpisujte riešenia iných. Každý príklad napíšte na novú stranu papiera a viditeľne označte, o ktorý príklad ide. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Veľa zdaru!

Úloha je za 10 bodov

1. Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a nech $\mathcal{R}$ je relácia "byť podmnožinou"definovaná na potenčnej množine $\mathcal{P}(A)$. Vieme (ukázali sme na prednáške), že táto relácia je čiastočné usporiadanie.

   Nech $M = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\}$

   Nájdite:

   (a) Počet horných ohraničení M, ktoré obsahujú
      i. tri prvky.
      ii. štyri prvky.
      iii. päť prvkov.

   (b) Počet všetkých horných ohraničení M.

   (c) $\sup(M)$.

   (d) Počet všetkých dolných ohraničení M.

   (e) $\inf(M)$.

2. Nech $(A, \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

   (a) Ak $(A, \mathcal{R})$ je zväz, tak $\mathcal{R}$ je lineárne usporiadanie.

   (b) Ak $\mathcal{R}$ je lineárne usporiadanie, tak $(A, \mathcal{R})$ je zväz.

3. Nech A je neprázdna množina a nech B je jej jedna fixovaná podmnožina. Definujme reláciu $\mathcal{R}$ na $\mathcal{P}(A)$ takto: $X\mathcal{R}Y$, pre $X, Y \subseteq A$ ak $B \cap X = B \cap Y$.

   (a) Overte, že $\mathcal{R}$ je ekvivalencia na $\mathcal{P}(A)$.

(b) Pre $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{1, 2\}$ nájdite rozklad $\mathcal{P}(A)$ indukovaný $\mathcal{R}$.

(c) Pre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$ nájdite $[X]$, ak $X = \{1, 3, 5\}$.

(d) Koľko tried rozkladu bude v rozklade indukovanom $\mathcal{R}$ pre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$?

4. Nech $A = \{v, w, x, y, z\}$. Určte počet relácií na A, ktoré sú

   (a) reflexívne a symetrické (zároveň)

   (b) ekvivalencie

   (c) reflexívne a symetrické, ale nie sú tranzitívne

   (d) ekvivalencie s práve dvoma triedami rozkladu

   (e) ekvivalencie s $w \in [x]$

   (f) ekvivalencie s $w \in [x]$ a $y \in [z]$

   (g) ekvivalencie s $w \in [x]$, $y \in [z]$ a $[x] \neq [z]$.

5. Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Pre každú z nasleduúcich hodnôt r určte reláciu ekvivalencie $\mathcal{R}$ na A, pre ktorú $|\mathcal{R}| = r$ alebo vysvetlite prečo taká relácia neexistuje.

   (a) $r = 7$

   (b) $r = 8$

   (c) $r = 9$

   (d) $r = 11$

   (e) $r = 22$

   (f) $r = 23$

   (g) $r = 30$

   (h) $r = 31$