Domáca úloha 5 Diskrétna matematika II Leto 2009-10

Zadané: Streda, 17. marca
Odovzdať: Do piatku **26.marca** vášmu cvičiacemu.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať, mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí. Neodpisujte riešenia iných. Každý príklad napíšte na novú stranu papiera a viditeľne označte, o ktorý príklad ide. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Veľa zdaru!

Úloha je za 10 bodov

1. Nech $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú relácie na A. Dokážte alebo vyvráťte:
   (a) Ak $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú reflexívne, tak aj $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ je reflexívna.
   (b) Ak $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú symetrické, tak aj $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ je symetrická.
   (c) Ak $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú antisymetrické, tak aj $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ je antisymetrické.
   (d) Ak $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú tranzitívne, tak aj $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ je tranzitívna.
   (e) Ak $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú reflexívne, tak aj $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ je reflexívna.
   (f) Ak $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú symetrické, tak aj $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ je symetrická.
   (g) Ak $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú antisymetrické, tak aj $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ je antisymetrické.
   (h) Ak $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú tranzitívne, tak aj $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ je tranzitívna.

2. Pre každé z nasledujúcich tvrdení o reláciách na množine A, kde $|A| = n$, určite, či je pravdivé alebo nepravdivé. Ak je nepravdivé, uveďte kontrapríklad.
   (a) Ak $\mathcal{R}$ je relácia na A a $|\mathcal{R}| \geq n$, tak $\mathcal{R}$ je reflexívna.
   (b) Nech $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú relácie na A a $\mathcal{R}_2 \supseteq \mathcal{R}_1$. Ak je $\mathcal{R}_1$ reflexívna (symetrická, antisymetrická, tranzitívna), tak aj $\mathcal{R}_2$ je reflexívna (symetrická, antisymetrická, tranzitívna).
   (c) Nech $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ sú relácie na A a $\mathcal{R}_2 \supseteq \mathcal{R}_1$. Ak je $\mathcal{R}_2$ reflexívna (symetrická, antisymetrická, tranzitívna), tak aj $\mathcal{R}_1$ je reflexívna (symetrická, antisymetrická, tranzitívna).
   (d) Ak $\mathcal{R}$ je ekvivalencia na A, tak $n \leq |\mathcal{R}| \leq n^2$.

3. Nech $A = \{w, x, y, z\}$. Koľko je relácií na A, ktoré sú
   (a) reflexívne
   (b) symetrické
   (c) reflexívne a symetrické
   (d) symetrické a obsahujú (x, y)
   (e) antisymetrické
   (f) antisymetrické a obsahujú (x, y)
   (g) symetrické a antisymetrické
   (h) reflexívne, symetrické a antisymetrické

4. Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Koľko symetrických relácií na A obsahuje presne
   (a) štyri usporiadané dvojice?
   (b) päť usporiadaných dvojíc?
   (c) sedem usporiadaných dvojíc?
   (d) osem usporiadaných dvojíc?

5. Nech A je množina, $|A| = n$. Nech $\mathcal{R}$ je relácia na A, ktorá je antisymetrická. Aká je najväčšia možná hodnota $|\mathcal{R}|$? Koľko antisymetrických relácií má takúto kardinalitu?

6. **Bonus:** (2 extra body)

   Nech p_1, p_2, p_3 sú rôzne prvočísla. Nech $n, k \in \mathbb{Z}^+$ také, že $n = p_1^5 p_2^3 p_3^k$. Nech A je množina kladných celočíselných deliteľov n. Definujme reláciu $\mathcal{R}$ na A takto: $x\mathcal{R}y$, ak x delí y. Nájdite k a $|A|$, ak vieme, že $\mathcal{R}$ má 5880 usporiadaných dvojíc.