
Domáca úloha 4 Diskrétna matematika II Leto 2009-10

Zadané: Streda, 10. marca

Odovzdať: Do piatku **19.marca** vášmu cvičiacemu.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať, mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí. Neodpisujte riešenia iných. Každý príklad napíšte na novú stranu papiera a viditeľne označte, o ktorý príklad ide. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Veľa zdraru!

Úloha je za 10 bodov

- (a) Nech $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ je binárna operácia definovaná takto:
 $f(a, b) = \gcd(a, b)$.
 - Je f komutatívna?
 - Je f asociatívna?
 - Má f identitu (jednotku)?(b) Nech $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$. Uvažujme binárnu operáciu $f : A \times A \rightarrow A$
 $f(a, b) = \gcd(a, b)$. Má f identitu?
- Nech $A = B = \mathbb{R}$. Nájdite $\pi_A(D)$ - projekciu na A a $\pi_B(D)$ - projekciu na B pre nasledujúce množiny $D \subseteq A \times B$.
 - $D = \{(x, y) | x = y^2\}$
 - $D = \{(x, y) | y = \sin x\}$
 - $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$

- Nech $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ je definovaná takto:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1; & x > 0 \\ -2x; & x \leq 0 \end{cases}$$

- Dokážte, že f je injektívna a surjektívna.
- Nájdite f^{-1} .

4. Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Koľko funkcií $f : A \rightarrow B$ je takých, že $f^{-1}(\{6, 7, 8\}) = \{1, 2\}$?
5. (a) Nájdite príklad funkcie $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, kde
- f je injektívna, ale nie surjektívna.
 - f je surjektívna, ale nie injektívna.
- (b) Vedeli by ste nájsť príklad *konečnej* množiny A a funkcie $f : A \rightarrow A$, ktorá by bola injektívna, ale nie surjektívna, alebo surjektívna, ale nie injektívna? Vysvetlite.
6. V nasledujúcich príkladoch je $f, g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Použite definíciu $O(g)$ a ukážte, že $f \in O(g)$.
- $f(n) = 100 \log_2 n$, $g(n) = \frac{1}{2}n$
 - $f(n) = 2^n$, $g(n) = 2^{2n} - 1000$
7. (a) Nájdite algoritmus a napíšte ho v zrozumiteľnom pseudokóde (alebo ho môžete aj naprogramovať a odovzdajte vytlačený kód vášho programu) na nájdenie minimálnej a maximálnej hodnoty v poli $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ celých čísel. ($n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ a prvky poľa nemusia byť nutne rôzne.)
- (b) Urobte analýzu vášho algoritmu a nájdite jeho výpočtovú zložitosť (najhorší prípad).
- (c) Urobte aj stručnú analýzu priemerného prípadu.