Domáca úloha 3 Diskrétna matematika II Leto 2009-10

Zadané: Streda, 3. marca
Odovzdať: Do piatku **12.marca** vášmu cvičiacemu.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať, mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí. Neodpisujte riešenia iných. Každý príklad napíšte na novú stranu papiera a viditeľne označte, o ktorý príklad ide. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Veľa zdaru!

Úloha je za 10 bodov

1. Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Potom sú nasledujúce tri podmienky ekvivalentné:
   (a) f je surjektívne
   (b) relácia f^- je všade definovaná
   (c) $f^- \circ f = I_B$.

2. Nájdite všetky reálne čísla x, také, že
   (a) $5\lfloor x \rfloor = \lfloor 5x \rfloor$
   (b) $\lfloor 5x \rfloor = 5$
   (c) $\lfloor x + 5 \rfloor = x + 5$
   (d) $\lfloor x + 5 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 5$

3. Nech $f : A \to B$ a $A_1 \subseteq A$. Zobrazenie $g : A_1 \to B$ s $g(a) = f(a)$ pre všetky $a \in A_1$ sa nazýva *zúžením* f na A_1. Označenie: $f|_{A_1}$.

   Nech $A_1 \subseteq A$ a $f : A_1 \to B$. Ak $g : A \to B$ a $g(a) = f(a)$ pre všetky $a \in A_1$. Zobrazenie g sa nazýva *rozšírením* zobrazenia f na A.

   Nech $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{w, x, y, z\}$ a $A_1 = \{c, e, f\} \subseteq A$. Nech $g : A_1 \to B$. Koľkými spôsobmi sa dá g rozšíriť na $f : A \to B$?

4. Ak $|A| = 4$ a existuje 1680 injektívnych zobrazení z A do B, koľko prvkov má B?

5. *Ackermanova funkcia* $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa dá rekurzívne definovať takto:

   $A(0, n) = n + 1,\ n \geq 0;$

   $A(m, 0) = A(m - 1, 1),\ m > 0$ a

   $A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1)),\ m, n > 0.$

   (Ackermanova funkcia je dôležitá v infortmatike v teórii rekurzívnych funkcií. Jej hodnoty rastú veľmi rýchlo aj pre malé vstupy. Napríklad $A(4, 2)$ je celé číslo s 19 729 číslicami v dekadickom zápise.)

   (a) Vyrátajte $A(1, 3)$ a $A(2, 3)$.

   (b) Dokážte, že $A(1, n) = n + 2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Ukážte, že $A(2, n) = 3 + 2n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Overte, že $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

6. Nech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ je binárna operácia definovaná takto:

   $f(a, b) = \lceil a + b \rceil.$

   (a) Je f komutatívna?

   (b) Je f asociatívna?

   (c) Má f identitu (jednotku)?