Domáca úloha 1 Diskrétna matematika II Leto 2009-10

Zadané: Streda, 17. februára
Odovzdať: Do piatku **26.februára** vášmu cvičiacemu.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať, mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí. Neodpisujte riešenia iných. Každý príklad napíšte na novú stranu papiera a viditeľne označte, o ktorý príklad ide. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Veľa zdaru!

Úloha je za 10 bodov

1. Nech je univerzum $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{2, 4, 5\}$. Určte:
   (a) počet relácií z A do B.
   (b) počet binárnych relácií na A.
   (c) počet relácií z A do B, ktoré obsahujú $(1, 2)$ a $(1, 5)$.
   (d) počet relácií z A do B, ktoré obsahujú presne päť usporiadaných dvojíc.
   (e) počet relácií na A, ktoré obsahujú aspoň sedem prvkov.

2. Nech $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ a nech A je množina všetkých kladných celočíselných deliteľov čísla n. Definujme reláciu $\mathcal{R}$ na A takto: $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ ak x delí y. Určte koľko usporiadaných dvojíc obsahuje relácia $\mathcal{R}$ ak
   (a) $n = 10$;
   (b) $n = 20$;
   (c) $n = 40$;
   (d) $n = 200$;
   (e) $n = 210$;
   (f) $n = 13860$;

3. Nech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{w, x, y, z\}$ a $C = \{4, 5, 6\}$.

   Definujme relácie $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$, $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$ a $\mathcal{R}_3 \subseteq B \times C$ takto:

   $\mathcal{R}_1 = \{(1, w), (3, w), (2, x), (1, y)\}$,

   $\mathcal{R}_2 = \{(w, 5), (x, 6), (y, 4), (y, 6)\}$,

   $\mathcal{R}_3 = \{(w, 4), (w, 5), (y, 5)\}$

   Určite:

   (a) $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3)$ a $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \cup (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3)$

   (b) $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3)$ a $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \cap (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3)$

4. Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a nech $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)(4, 4)\}$, je relácia na A. Nájdite dve relácie $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ na A také, aby $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$, ale $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{T} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4)\}$.

5. Nech $|A| = 5$.

   (a) Koľko orientovaných grafov sa dá zostrojiť na A?

   (b) Koľko je relácií na A?

Bonus: Extra 2 body.

Pre reláciu $\mathcal{R}$ na množine A definujme $\mathcal{R}^0 = I_A = \{(a, a) | a \in A\}$. Ak $|A| = n$, dokážte, že existujú $s, t \in \mathbb{N}$, kde $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$, pre ktoré $\mathcal{R}^s = \mathcal{R}^t$.