Ústne otázky pre hodnotenie A/B

Pascalova formula. V nasledujúcom príklade využijeme túto vlastnosť kombinačných čísel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Počet podmnožín konečnej množiny. Pre každé prirodzené číslo n platí vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{2}$$

Dôkaz. Najprv dokážeme rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{3}$$

Skutočne, postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} \overset{(1)}{=} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + 1 = \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Tvrdenie (2) dokážeme matematickou indukciou podľa n. Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0.$$

Induktívny krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{IP}$$

To je induktívny predopklad. Dokážeme, že platí aj pre $n + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \overset{(3)}{=} 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{\text{IP}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}. \qquad \square$$

Efektívny výpočet Fibonacciho postupnosti. Zápis f_n označuje postupnosť prirodzených čísel, ktorej prvkami sú Fibonacciho čísla:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 0 \\
f_1 &= 0 \\
f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n.
\end{aligned}
$$

Uvažujme ternárnu funkciu g definovanú primitívnou rekurziou so substitúciou v parametroch:

$$
\begin{aligned}
g(0, a, b) &= a \\
g(n+1, a, b) &= g(n, a+b, a).
\end{aligned}
$$

Tvrdíme, že platí

$$f_{n+1} = g(n, 1, 0). \tag{4}$$

Dôkaz. Najprv dokážeme pomocné tvrdenie

$$\forall k \, g(n, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+k}. \tag{5}$$

To dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$g(0, f_{k+1}, f_k) = f_{k+1} = f_{0+1+k}.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$\forall k \, g(n, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+k}. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že platí aj pre $n+1$:

$$\forall k \, g(n+1, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+1+k}.$$

Zvoľme si ľubovolné číslo k. Postupnými úpravami dostaneme

$$
\begin{aligned}
g(n+1, f_{k+1}, f_k) = g(n, f_{k+1} + f_k, f_{k+1}) = g(n, f_{k+2}, f_{k+1}) = \\
= g(n, f_{k+1+1}, f_{k+1}) \overset{\text{IP}}{=} f_{n+1+k+1} = f_{n+1+1+k}.
\end{aligned}
$$

Všimnime si, že sme IP použili s parametrom $k+1$ a nie s k!

Teraz už môžeme dokázať požadované tvrdenie (4):

$$f_{n+1} = f_{n+1+0} \overset{(5)}{=} g(n, f_{0+1}, f_0) = g(n, f_1, f_0) = g(n, 1, 0). \qquad \square$$

Kombinatorické identity. Pomocou kombinatorických argumentov dokážte nasledujúce vlastnosti kombinačných čísel:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad \text{pre } n \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} \qquad \text{pre } n \geq 1$$