Príklady

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 2 \\ a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n &= 0 \qquad \text{pre } n \geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Charakteristická rovnica

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

má tri rôzne reálne korene: 1, 2 a 3. Všeobecné riešenie má tvar

$$a_n = A1^n + B2^n + C3^n = A + B2^n + C3^n.$$

Lineárny systém rovníc

$$\begin{aligned} 0 = a_0 &= A + B2^0 + C3^0 = A + B + C \\ 0 = a_1 &= A + B2^1 + C3^1 = A + 2B + 3C \\ 2 = a_2 &= A + B2^2 + C3^2 = A + 4B + 9C \end{aligned}$$

má riešenie $A = 1$, $B = -2$ a $C = 1$. Preto

$$a_n = 1 + (-2)2^n + (1)3^n = 3^n - 2^{n+1} + 1. \qquad \square$$

Priklad. Koľko slov dĺžky n nad abecedou $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ má párny počet výskytov znaku 0. Nájdite rekurentný vzťah vyjadrujúci tento počet. Uveďte vhodné počiatočné podmienky. Rekurentnú rovnicu vyriešte.

Návod. Označme a_n hľadaný počet slov dĺžky n. Ľahko sa presvedčíme, že

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 4 \qquad a_2 = 5^2 - (4+4) = 17,$$

a tiež, že pre $n \geq 1$ platí rovnosť

$$a_n = 4a_{n-1} + (5^{n-1} - a_{n-1}).$$

Postupnosť a_n spĺňa tento rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_n = 3a_{n-1} + 5^{n-1} \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned} \qquad \square$$

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/2 \\ a_1 &= 3 \\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n &= 3 - 2^n \qquad \text{pre } n \geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Všeobecné riešenie rekurentného vzťahu hľadáme v tvare

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

kde $a_n^{(h)}$ je všeobecné riešenie príslušného homogenného rekurentného vzťahu

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0 \qquad \text{pre } n \geq 0$$

a $a_n^{(p)}$ je partikulárne riešenie nehomogenného rekurentného vzťahu.

Charakteristická rovnica homogenného rekurentného vzťahu

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) = 0$$

má dva rôzne reálne korene: 1 a 4. Všeobecné riešenie homogenného rekurentného vzťahu má tvar

$$a_n^{(h)} = A1^n + B4^n = A + B4^n.$$

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$a_n^{(p)} = Cn + D2^n.$$

Po dosadení do nehomogenného rekurentného vzťahu dostaneme

$$C(n+2) + D2^{n+2} - 5(C(n+1) + D2^{n+1}) + 4(Cn + D2^n) = 3 - 2^n.$$

Po úpravach

$$-3C - 2D2^n = 3 - 2^n.$$

Z toho plynie, že $C = -1$ a $D = 1/2$. Preto

$$a_n^{(p)} = (-1)n + (1/2)2^n = 2^{n-1} - n.$$

Lineárny systém rovníc

$$\begin{aligned} 1/2 = a_0 &= A + B4^0 + 2^{0-1} - 0 = A + B + 1/2 \\ 3 = a_1 &= A + B4^1 + 2^{1-1} - 1 = A + 4B \end{aligned}$$

má riešenie $A = -1$ a $B = 1$. Preto

$$a_n = -1 + (1)4^n + 2^{n-1} - n = 4^n + 2^{n-1} - (n+1).$$

□

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 0 \\ 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n &= 0 \qquad \text{pre } n \geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Charakteristická rovnica

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = 0$$

má jeden dvojnásobný reálny koreň: $1/2$. Všeobecné riešenie má tvar

$$a_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + Bn\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Lineárny systém rovníc

$$\begin{aligned} -1 = a_0 &= A\left(\frac{1}{2}\right)^0 + B(0)\left(\frac{1}{2}\right)^0 = A \\ 0 = a_1 &= A\left(\frac{1}{2}\right)^1 + B(1)\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \end{aligned}$$

má riešenie $A = -1$ a $B = 1$. Preto

$$a_n = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + (1)n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n-1}{2^n}.$$

□

Priklad. Uvažujme reťazce vytvorené zo znakov abecedy $\{0,1,2\}$. Nech a_n je počet reťazcov dĺžky n neobsahujúcich dve po sebe idúce párne cifry. Nájdite rekurentný vzťah vyjadrujúci a_n. Uveďte vhodné počiatočné podmienky. Rekurentnú rovnicu vyriešte.

Návod. Označme a_n hľadaný počet reťazcov dĺžky n. Ľahko sa presvedčime, že

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_2 = 3^2 - 4 = 5,$$

a tiež, že pre $n \geq 2$ platí rovnosť

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Postupnosť a_n spĺňa tento rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_1 = 3 \\ &a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{pre } n \geq 2. \end{aligned}$$

□

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n &= 2n - 5 \qquad \text{pre } n \geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Všeobecné riešenie rekurentného vzťahu hľadáme v tvare

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

kde $a_n^{(h)}$ je všeobecné riešenie príslušného homogenného rekurentného vzťahu

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \qquad \text{pre } n \geq 0$$

a $a_n^{(p)}$ je partikulárne riešenie nehomogenného rekurentného vzťahu.

Charakteristická rovnica homogenného rekurentného vzťahu

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$$

má dva rôzne reálne korene: 2 a 3. Všeobecné riešenie homogenného rekurentného vzťahu má tvar

$$a_n^{(h)} = A2^n + B3^n.$$

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$a_n^{(p)} = Cn + D.$$

Po dosadení do nehomogenného rekurentného vzťahu dostaneme

$$C(n+2) + D - 5(C(n+1) + D) + 6(Cn + D) = 2n - 5.$$

Po úpravach

$$2Cn - (3C - 2D) = 2n - 5.$$

Z toho plynie, že $C = 1$ a $D = -1$. Preto

$$a_n^{(p)} = (1)n + (-1) = n - 1.$$

Lineárny systém rovníc

$$\begin{aligned} -1 = a_0 &= A2^0 + B3^0 + 0 - 1 = A + B - 1 \\ 1 = a_1 &= A2^1 + B3^1 + 1 - 1 = 2A + 3B \end{aligned}$$

má riešenie $A = -1$ a $B = 1$. Preto

$$a_n = (-1)2^n + (1)3^n + n - 1 = 3^n - 2^n + n - 1. \qquad \square$$

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/2 \\ a_1 &= 1 \\ 2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n &= 0 \qquad \text{pre } n \geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Charakteristická rovnica

$$2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1) = 0$$

má dva rôzne reálne korene: $1/2$ a -1. Všeobecné riešenie má tvar

$$a_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B(-1)^n.$$

Lineárny systém rovníc

$$\begin{aligned} 1/2 = a_0 &= A\left(\frac{1}{2}\right)^0 + B(-1)^0 = A + B \\ 1 = a_1 &= A\left(\frac{1}{2}\right)^1 + B(-1)^1 = \frac{A}{2} - B \end{aligned}$$

má riešenie $A = 1$ a $B = -1/2$. Preto

$$a_n = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1/2)(-1)^n = \frac{1}{2^n} - \frac{(-1)^n}{2}. \qquad \square$$

Priklad. Počítačový systém považuje reťazec vytvorený zo znakov binárnej abecedy $\{0, 1\}$ za správne kódové slovo, ak reťazec obsahuje dve po sebe idúce nuly. Takže napr.: 01001 je správne kódové slovo, kým 01010 nie je.

Nech a_n označuje počet správnych kódových slov dĺžky $n \geq 0$. Nájdite rekurentný vzťah vyjadrujúci a_n. Nezabudnite uviesť vhodné počiatocné podmienky. Vypočítajte hodnoty a_5 a a_6.

Rekurentnú rovnicu *neriešte.*

Riešenie. Ľahko sa presvedčime, že

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 3,$$

a tiež, že pre $n \geq 2$ platí rovnosť

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}.$$

Postupnosť a_n spĺňa tento rekurentný vzťah 2. stupňa:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2} \quad \text{pre } n \geq 2. \end{aligned}$$

Odtiaľ

$$\begin{aligned}
a_4 &= 3 + 1 + 2^{4-2} = 4 + 4 = 8 \\
a_5 &= 8 + 3 + 2^{5-2} = 11 + 8 = 19 \\
a_6 &= 19 + 8 + 2^{6-2} = 27 + 16 = 43.
\end{aligned}$$ □

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_{n+1} &= 3a_n + 3^{n+1} + 2 \qquad \text{pre } n \geq 0.
\end{aligned}$$

Riešenie. Všeobecné riešenie rekurentného vzťahu hľadáme v tvare

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

kde $a_n^{(h)}$ je všeobecné riešenie príslušného homogenného rekurentného vzťahu

$$a_{n+1} = 3a_n \qquad \text{pre } n \geq 0$$

a $a_n^{(p)}$ je partikulárne riešenie nehomogenného rekurentného vzťahu.

Všeobecné riešenie homogenného rekurentného vzťahu má tvar

$$a_n^{(h)} = A3^n.$$

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$a_n^{(p)} = B + Cn3^n.$$

Po dosadení do nehomogenného rekurentného vzťahu dostaneme

$$B + C(n+1)3^{n+1} = 3(B + Cn3^n) + 3^{n+1} + 2.$$

Po úpravach

$$3C3^n + (-2B) = (3)3^n + 2.$$

Z toho plynie, že $B = -1$ a $C = 1$. Preto

$$a_n^{(p)} = (-1) + (1)n3^n = n3^n - 1.$$

Lineárna rovnica

$$1 = a_0 = A3^0 + (0)3^0 - 1 = A - 1$$

má riešenie $A = 2$. Preto

$$a_n = (2)3^n + n3^n - 1 = (n+2)3^n - 1.$$ □

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 6 \\ a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n &= 0 \qquad \text{pre } n \geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Charakteristická rovnica

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0$$

má jeden dvojnásobný reálny koreň: 3. Všeobecné riešenie má tvar

$$a_n = A3^n + Bn3^n.$$

Lineárny systém rovníc

$$\begin{aligned} 1 = a_0 &= A3^0 + B(0)3^0 = A \\ 6 = a_1 &= A3^1 + B(1)3^1 = 3A + 3B \end{aligned}$$

má riešenie $A = 1$ a $B = 1$. Preto

$$a_n = (1)3^n + (1)n3^n = (n+1)3^n.$$ □

Priklad. Koľko slov dĺžky $n \geq 0$ nad abecedou $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ má párny počet výskytov znaku 0. Nájdite rekurentný vzťah vyjadrujúci tento počet. Uveďte vhodné počiatočné podmienky. Rekurentnú rovnicu vyriešte.

Návod. Označme a_n hľadaný počet reťazcov dĺžky n. Ľahko sa presvedčime, že

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 9 \qquad a_2 = 9^2 + 1 = 82,$$

a tiež, že pre $n \geq 1$ platí rovnosť

$$a_n = 9a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1}.$$

Postupnosť a_n spĺňa tento rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned}$$ □

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 1 \\ 2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n &= 0 \qquad \text{pre } n \geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Charakteristická rovnica

$$2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x-2) = 0$$

má dva rôzne reálne korene: 1/2 a 2. Všeobecné riešenie má tvar

$$a_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B2^n.$$

Lineárny systém rovníc

$$\begin{aligned} -1 = a_0 &= A\left(\frac{1}{2}\right)^0 + B2^0 = A + B \\ 1 = a_1 &= A\left(\frac{1}{2}\right)^1 + B2^1 = \frac{A}{2} + 2B \end{aligned}$$

má riešenie $A = -2$ a $B = 1$. Preto

$$a_n = (-2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + (1)2^n = 2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^n - 2^{1-n}. \qquad \square$$

Priklad. Koľko slov dĺžky $n \geq 0$ nad abecedou $\{0, 1, 2\}$ má párny počet výskytov znaku 0. Nájdite rekurentný vzťah vyjadrujúci tento počet. Uveďte vhodné počiatočné podmienky. Rekurentnú rovnicu vyriešte.

Riešenie. Označme a_n hľadaný počet slov dĺžky n. Ľahko sa presvedčíme, že

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 2 \qquad a_2 = 2^2 + 1 = 5,$$

a tiež, že pre $n \geq 1$ platí rovnosť

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1} - a_{n-1}.$$

Postupnosť a_n spĺňa tento rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 3^{n-1} \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned}$$

Pri riešení rekurentného vzťahu vychádzame z tejto vlastnosti platnej pre $n \geq 1$:

$$a_n - a_0 = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1}.$$

Preto

$$a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} = 1 + \frac{3^n - 1}{2} = \frac{3^n + 1}{2}. \qquad \square$$

Priklad. Vyriešte nasledujúci rekurentný vzťah:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n &= 1 \qquad \text{pre } n \geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Všeobecné riešenie rekurentného vzťahu hľadáme v tvare

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

kde $a_n^{(h)}$ je všeobecné riešenie príslušného homogenného rekurentného vzťahu

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \qquad \text{pre } n \geq 0$$

a $a_n^{(p)}$ je partikulárne riešenie nehomogenného rekurentného vzťahu.

Charakteristická rovnica homogenného rekurentného vzťahu

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$$

má jeden dvojnásobný reálny koreň: 2. Všeobecné riešenie homogenného rekurentného vzťahu má tvar

$$a_n^{(h)} = A2^n + Bn2^n.$$

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$a_n^{(p)} = C.$$

Po dosadení do nehomogenného rekurentného vzťahu dostaneme

$$C - 4C + 4C = 1.$$

Z toho plynie, že $C = 1$. Preto

$$a_n^{(p)} = 1.$$

Lineárny systém rovníc

$$\begin{aligned} 0 = a_0 &= A2^0 + B(0)2^0 + 1 = A + 1 \\ 1 = a_1 &= A2^1 + B(1)2^1 + 1 = 2A + 2B + 1 \end{aligned}$$

má riešenie $A = -1$ a $B = 1$. Preto

$$a_n = (-1)2^n + (1)n2^n + 1 = (n-1)2^n + 1. \qquad \square$$